

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل ویولت

علی پاک نیت^۱، محمد اقتصاد^۲

^۱ دانشجوی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز؛ ali.pakniyat@gmail.com

^۲ دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز؛ eghtesad@shirazu.ac.ir

۴- آنالیز چند مقیاسی^۴

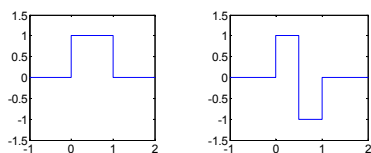
منظور از آنالیز چند مقیاسی (MRA) یا آنالیز در رزولوشن های مختلف، نگاه به تابع در مقیاس های مختلف است که در هر مقیاس، جزئیات کمتر یا بیشتری از تابع قابل دستیابی است.

در MRA با فضاهایی از توابع سروکار خواهیم داشت که اولین فضا (V_0) ضمت ترین آنهاست و فضاهای بالاتر به ترتیب با ظرفیت بیشتری به تابع می نگرند. نهایت امر فضایی از تمامی توابع با انرژی محدود ($L^2(\mathbb{R})$) خواهد بود. منظور از انرژی محدود این است که انتگرال توان دوم تابع (انرژی آن) در کل دامنه محدود باشد:

$$\int |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1)$$

توابعی که در آنالیز چند مقیاسی مورد استفاده قرار می گیرند متشکلند از توابع مقیاس^۵ در هر مقیاس^۶ به علاوه توابع ویولت که جهت انتقال میان دو مقیاس یا رزولوشن مختلف به کار می روند.

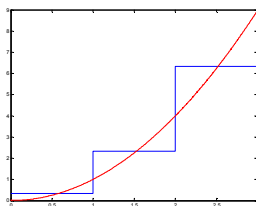
ساده ترین خانواده توابعی که در MRA مورد استفاده قرار می گیرند توابع "هار" می باشند. در شکل (۱) توابع مقیاس و ویولت هار نمایش داده شده اند.



شکل ۱: تابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) هار در مقیاس صفر

در هر مقیاس تنها با استفاده از توابع مقیاس همان مقیاس و یا با استفاده از توابع مقیاس یک مقیاس پایه و افزودن ویولت های مقیاس های ظریف تر می توان بیان تابع در آن مقیاس را بدست آورد.

شکل (۲) چگونگی بیان تابع $y=x^2$ توسط تابع مقیاس هار در مقیاس صفر و شکل (۳) چگونگی افزوده شدن ویولت های مقیاس ۱ به بیان تابع توسط تابع مقیاس هار در مقیاس صفر و در نتیجه رسیدن به بیان تابع در مقیاس ۱ را نشان می دهند.



شکل ۲: بیان تابع $y=x^2$ در مقیاس صفر توسط تابع مقیاس هار

۱- چکیده

در این مقاله روش حل معادلات دیفرانسیل خطی توسط تبدیل ویولت بررسی شده است. توابع دابشیز^۱ ۴ به همراه توابع گوشه ای مربوطه به عنوان پایه های فضای مورد استفاده در نظر گرفته شده و محاسبات در این فضا صورت می گیرد. سپس با استفاده از تبدیل معکوس، جواب ها به حوزه اصلی باز می گردد. استفاده از توابع گوشه ای این امکان را فراهم می سازد تا محاسبات، تنها در حوزه ای محدود که از نظر دینامیکی اهمیت بیشتری دارد انجام گرفته و از انجام محاسبات در کل دامنه که در روش های عددی، عموماً زمان محاسبات را به مراتب بالا می برد اجتناب شود. تفاوت عمده این کار با کارهای گذشته، دقت به مراتب بالاتر جواب ها به دلیل شیوه حل و برنامه نوشته شده برای حل معادلات می باشد.

۲- کلمات کلیدی

ویولت^۱، دابشیز^۲، توابع گوشه ای^۳، معادلات دیفرانسیل

۳- مقدمه

در علوم و مهندسی بر حسب نیاز از تبدیلات ریاضی فراوانی استفاده می شود. تبدیل ویولت یکی از این تبدیل ها می باشد که بیشتر جهت آنالیز داده ها و پردازش سیگنال مورد استفاده قرار می گیرد. این تبدیل خواص منحصر به فردی دارد که آن را به ابزاری توانمند در تحلیل اجزای یک داده یا سیگنال مبدل کرده، اما شیوه استفاده از تبدیل ویولت بیشتر بدین صورت است که پاسخ نهایی سیستم به محیط این تبدیل (که حوزه فرکانس-زمان می باشد) برده می شود و در آنجا محتوای فرکانسی سیگنال در زمان های مختلف ارزیابی شده و اطلاعات لازم حاصل می شود. لازمه استفاده از این شیوه آن است که معادلات سیستم به طور کامل حل شده باشند و بنابراین تنها پاسخی که از حل معادلات سیستم در حوزه زمان بدست آمده توسط این تبدیل مورد بررسی قرار گیرد. اما تبدیل ویولت نیز مانند تبدیل های دیگر (از جمله تبدیل لاپلاس و فوریه و ...) این قابلیت را دارد که خود به عنوان ابزاری جهت حل معادلات سیستم (که به شکل معادلات دیفرانسیل می باشند) به کار رود. این جنبه از تبدیل ویولت تاکنون کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله تلاش شده است تا معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به کمک این تبدیل حل شده و مشکلات پیش رو در این زمینه مورد بررسی قرار گیرد.

⁴ Multi Resolution Analysis (MRA)

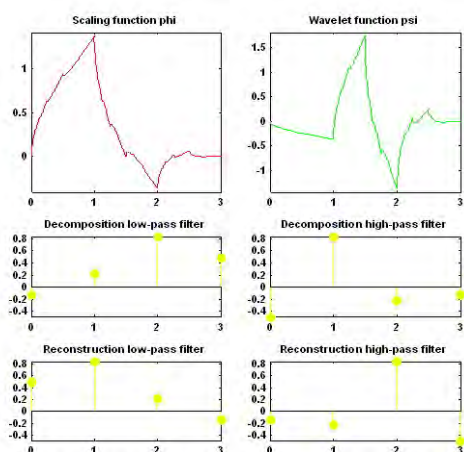
⁵ Scaling Functions

⁶ Resolution

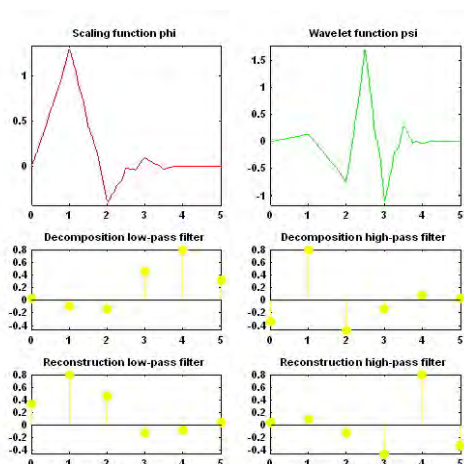
¹ Wavelet Transform

² Daubechies

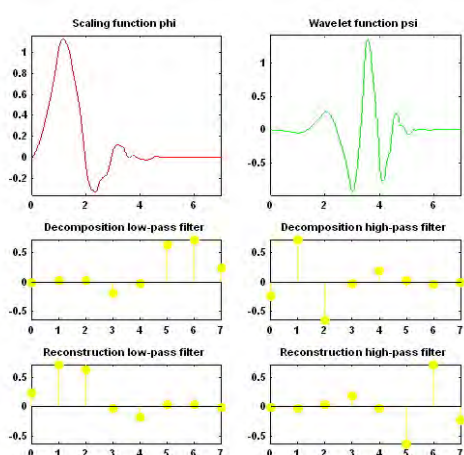
³ Edge Functions



شکل ۳: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۲

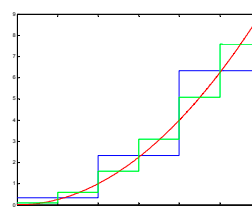


شکل ۴: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۳



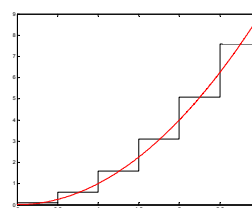
شکل ۵: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۴

خانواده توابع دابشیز برای اعداد بزرگتر نیز قابل تعریف است. به طور مثال توابع دابشیز ۵ و ۱۰ در شکل های (۹) و (۱۰) نشان داده شده اند.



شکل ۶: افزودن توابع ویولت مقیاس ۱ به توابع مقیاس در مقیاس صفر و رسیدن به بیان تابع در مقیاس ۱

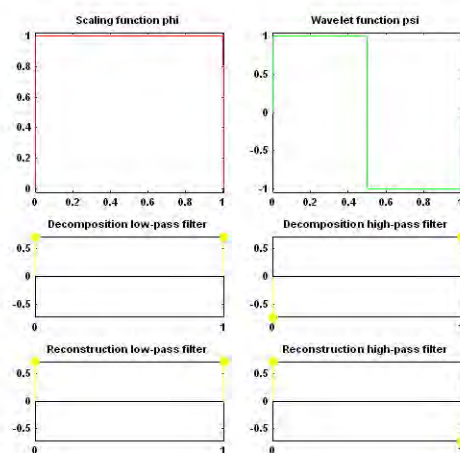
شکل (۴) بیان تابع را تنها با استفاده از توابع پایه مقیاس ۱ نشان می دهد. مقایسه شکل های (۳) و (۴) نشان می دهد که این دو بیان دقیقاً با یکدیگر معادلند.



شکل ۷: بیان تابع $y=x^2$ در مقیاس ۱ توسط تابع مقیاس هار

توابع هار به دلیل سادگی و داشتن ضابطه صریح در کاربردهای بسیاری از جمله پردازش تصویر مورد استفاده قرار می گیرند اما این توابع مشتق پذیر نبوده و قابل استفاده در حل معادلات دیفرانسیل نمی باشند.

از معروف ترین توابع مورد استفاده در آنالیز چند مقیاسی توابع دابشیز (Daubechies) می باشند که انواع مختلفی دارند. این توابع با استفاده از فیلترهای بالاگذر-پایین گذر^۷ و با استفاده از روابط بازگشتی محاسبه می شوند. (جهت اطلاع از شیوه بدست آوردن این توابع به مرجع [۲] مراجعه فرمایید). توابع دابشیز ۱ تا ۴ در شکل های (۵) تا (۸) نمایش داده شده اند. نمودارهای زیرین در هر شکل فیلترهای مورد استفاده جهت تولید این توابع را نشان می دهد.



شکل ۸: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۱

⁷ High Pass – Low Pass Filters

توابع معرفی شده (شکل ۱ و شکل های ۵ تا ۱۰) همگی در مقیاس صفر بیان شده اند اما همانگونه که پیش تر بیان شد، جهت بیان یک تابع (سیگنال) در مقیاس دلخواه، بایستی تابع مقیاس در مقیاس پایه و توابع ویولت در مقیاس های ریزتر (تا مقیاس مورد نظر) بیان شود. این ارتباط میان توابع هر رزولوشن با رزولوشن صفر توسط معادله (۲) قابل بیان است.

$$\phi_{m,k}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - k) \quad (2)$$

ضریب $2^{m/2}$ جهت عمودسازی نرمال^۹ هر تابع پایه مورد استفاده قرار می گیرد تا رابطه (۳) برقرار باشد.

$$\int \phi_{m,i} \cdot \phi_{m,j} dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (3)$$

درستی رابطه (۳) برای حالت $i=j$ در معادله (۴) نشان داده شده است، (حالت $i \neq j$ به دلیل تعامد برقرار خواهد بود):

$$\begin{aligned} \int \phi_{m,k}^2 dt &= \int \left[2^{m/2} \phi(2^m t - k) \right]^2 dt \\ &= \int \left[\phi(2^m t - k) \right]^2 \cdot [2^m dt] = \int \left[\phi(u - k) \right]^2 du = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

بدین ترتیب هر تابع عضو فضای $L^2(\mathbb{R})$ توسط معادله (۵) برحسب توابع پایه تبدیل ویولت قابل بیان خواهد بود:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{b,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=b}^{\infty} c_{m,k} \psi_{m,k} \quad (5)$$

در رابطه فوق توابع مقیاس رزولوشن پایه b که با پارامتر انتقال k جابجا شده اند با $\phi_{b,k}$ و توابع ویولت رزولوشن m (مربوط به رزولوشن های بالاتر از رزولوشن پایه b) که با پارامتر انتقال k جابجا شده اند با $\psi_{m,k}$ نشان داده شده اند.

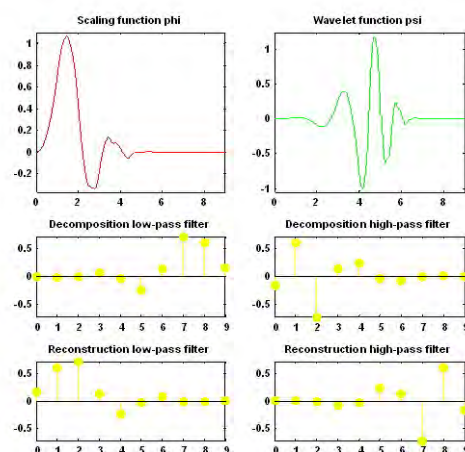
از آنجا که برای توابع هموار ضرایب $c_{m,k}$ در m های بالا، به سمت صفر می روند و همچنین به این دلیل که عموماً بیان تابع در رزولوشن های محدود (و نه رزولوشن بی نهایت) بیان مناسبی از تابع اصلی است بنابراین بیان رزولوشن n را به عنوان تقریب مناسبی از تابع در نظر می گیرند:

$$f(t) \approx f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{b,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=b}^n c_{m,k} \psi_{m,k} \quad (6)$$

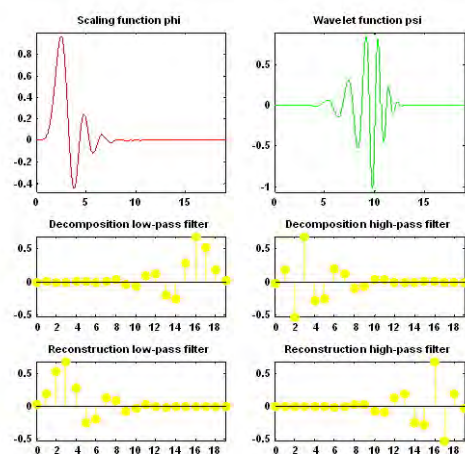
و همانگونه که اشاره شد این بیان، قابل ارائه بر مبنای توابع مقیاس رزولوشن n (به تنهایی) خواهد بود:

$$f(t) \approx f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{b,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \times 2^{n/2} \phi(2^n t - k) \quad (7)$$

در این مقاله از توابع مقیاس دابشیز^۹ به فرم معادله (۷) استفاده شده است. علت انتخاب توابع دابشیز^۹ آن است که هم تولید آنها



شکل ۹: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۵



شکل ۱۰: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۱۰

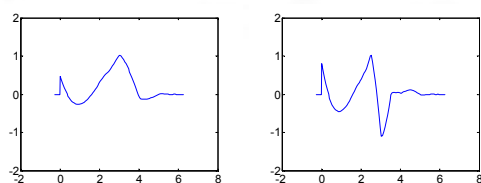
همانگونه که مشاهده می شود با افزایش شماره خانواده، توابع هموارتری تولید می شود که افزایش تعداد نقاط مورد استفاده در فیلترها و در نتیجه پیچیدگی تولید این توابع را به همراه دارد.

در مورد توابع دابشیز نکات زیر قابل توجه است:

۱. توابع دابشیز ۱ همان توابع هار هستند.
۲. تمامی توابع پایه معرفی شده (به شکل فعلی)، جهت بیان خواص سیگنال در بازه ۰ تا ۱ به کار می روند.
۳. با جابجا کردن هر یک از این توابع به میزان ۱ واحد، تابع جدید بر تابع اصلی عمود^۸ می شود و در نتیجه می توانند جهت بیان خواص سیگنال در بازه های دیگر به کار روند.
۴. با افزایش شماره خانواده توابع دابشیز، توابع مربوطه در بازه بزرگتری گسترده می شوند (علی رغم اینکه کماکان جهت بیان خواص سیگنال در بازه واحد به کار می روند).
۵. توابع پایه به همراه توابعی که از جابجا کردن تابع پایه به میزان مضربی از واحد تولید می شوند پایه های فضایی را تشکیل می دهند که می تواند یک سیگنال را در دامنه خود بازایی کنند.

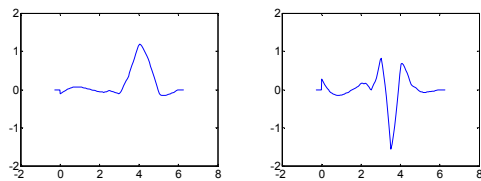
⁹ Ortho-normalizing

⁸ Orthogonal



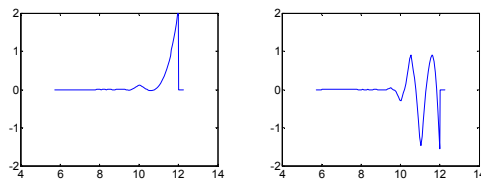
شکل ۱۴: سومین تابع مقیاس (چپ) سمت چپ

و سومین ویولت سمت چپ (راست) دابشیز ۴



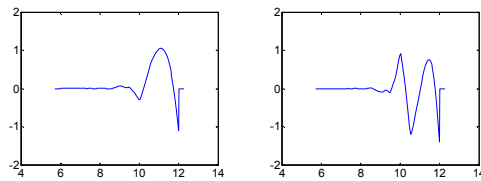
شکل ۱۵: چهارمین تابع مقیاس (چپ) سمت چپ

و چهارمین ویولت سمت چپ (راست) دابشیز ۴



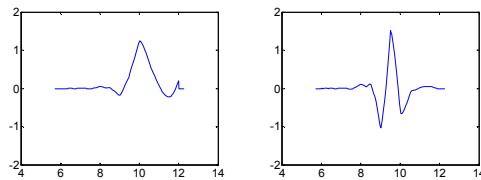
شکل ۱۶: اولین تابع مقیاس (چپ) سمت راست

و اولین ویولت سمت راست (راست) دابشیز ۴



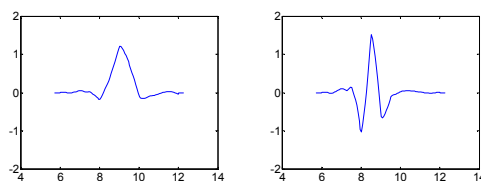
شکل ۱۷: دومین تابع مقیاس (چپ) سمت راست

و دومین ویولت سمت راست (راست) دابشیز ۴



شکل ۱۸: سومین تابع مقیاس (چپ) سمت راست

و سومین ویولت سمت راست (راست) دابشیز ۴

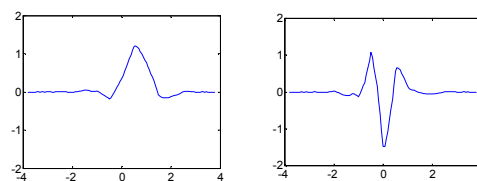


شکل ۱۹: چهارمین تابع مقیاس (چپ) سمت راست

و چهارمین ویولت سمت راست (راست) دابشیز ۴

همان گونه که مشاهده می شود، گوشه ای ترین تابع مقیاس (همچنین ویولت) در هر سمت، بسیار متفاوت تر از بقیه توابع گوشه ای نسبت به توابع میانی هستند (از نظر شکل ظاهری). این امر بدین دلیل است که در گوشه ای ترین قسمت، مقدار بیشتری از تابع اصلی (تابع میانی) به خارج از بازه مجاز می رود که اطلاعات مربوط به آن ناحیه بایستی به نوعی به نزدیک مرز منتقل شوند. این امر

نسبتا ساده است و هم به میزان کافی هموار هستند تا مشتقات همواری از آنها استخراج شود. ضمن آنکه به دلیل سازگاری با توابع گوشه ای در نظر گرفته شده (بخش ۵ همین مقاله) به جای توابع دابشیز ۴ جهت دربرگیری فشرده^{۱۰} (شکل ۸)، از توابع دابشیز ۴ با کمترین عدم تقارن^{۱۱} (شکل ۱۱) استفاده شده است.

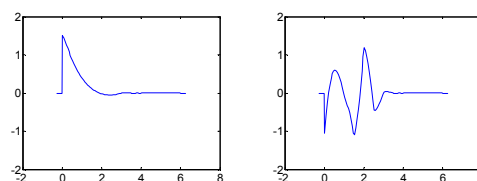


شکل ۱۱: توابع مقیاس (چپ) و ویولت (راست) دابشیز ۴ بر مبنای کمترین

عدم تقارن (استفاده شده در این مقاله)

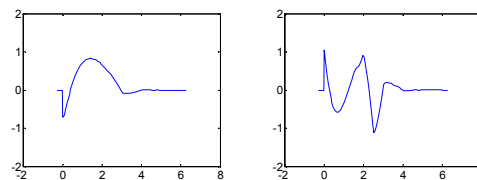
۵- توابع گوشه ای

همانگونه که بیان شد، توابع مقیاس و ویولت ها به صورت محلی^{۱۲} تعریف می شوند که عموماً در رزولوشن صفر اطلاعات مربوط به بازه ای به طول واحد را بیان می کنند، اما توابع دابشیز ۴ در محدوده ای به طول تقریبی ۷ واحد گسترده شده اند (در حالی که کماکان جهت بیان اطلاعات تابع در بازه ی واحد به کار می روند). در مورد توابعی که دامنه نامحدود دارند این موضوع مشکلی ایجاد نمی کند اما در مورد توابع با دامنه محدود زمانی که اطلاعات تابع در بازه ای نزدیک به مرز مورد نیاز است، دنباله توابع مقیاس و ویولت قرار داده شده در این بازه ها به خارج از دامنه تعریف کشیده می شود که این موضوع مشکل آفرین خواهد بود. جهت حل این مشکل توابع گوشه ای بدین شکل تعریف می شوند که اولاً دنباله آنها از مرز عبور نکند و ثانیاً شرط تعادل در بازه های مجاور مانند قبل برقرار بماند. بر این اساس برای دابشیز ۴، هشت عدد تابع مقیاس گوشه ای چپ و راست (هر طرف چهار عدد) و هشت ویولت گوشه ای سمت چپ به دست می آید که در شکل های (۱۲) تا (۱۹) نشان داده شده:



شکل ۱۲: اولین تابع مقیاس (چپ) سمت چپ

و اولین ویولت سمت چپ (راست) دابشیز ۴



شکل ۱۳: دومین تابع مقیاس (چپ) سمت چپ

و دومین ویولت سمت چپ (راست) دابشیز ۴

¹⁰ Compactly Supported

¹¹ Least Asymmetric

¹² Local

بر مبنای روش گالرکین، ضرایب a_i بایستی به گونه ای یافته شوند که تابع خطای E (که مربوط به حذف رزولوشن های بالاتر است) بر تمامی توابع پایه مورد استفاده (در رزولوشن های استفاده شده) عمود باشد. بنابراین:

$$\forall i \in [1, 2, \dots, N] : \langle E(a_1, a_2, \dots, a_N, t), g_i(t) \rangle = 0 \quad (11)$$

$$\forall i \in [1, 2, \dots, N] : \left\langle h(t) - L \left[\sum_{j=1}^N a_j g_j \right], g_i(t) \right\rangle = 0 \quad (12)$$

$$\forall i \in [1, 2, \dots, N] : \left\langle L \left[\sum_{j=1}^N a_j g_j \right], g_i(t) \right\rangle = \langle h(t), g_i(t) \rangle \quad (13)$$

$$\forall i \in [1, 2, \dots, N] : \sum_{j=1}^N a_j \langle g_i(t), L[g_j] \rangle = \langle g_i(t), h(t) \rangle \quad (14)$$

$$\left[\langle g_i(t), L[g_j] \rangle \right] \begin{Bmatrix} a_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle g_i(t), h(t) \rangle \end{Bmatrix} \quad (15)$$

در معادله (۱۵) بجز ماتریس متشکل از a_j ها که همان ضرایب جواب معادله دیفرانسیل در پایه توابع g_j می باشد، دو ماتریس دیگر معلوم می باشند. بنابراین با حل معادله (۱۵) ماتریس a_j بدست می آید. با قرار دادن a_j های بدست آمده در معادله (۳) و نهایتاً افزودن تابع مناسب $u_0(t)$ ، تابع $u(t)$ حاصل بیان جواب اصلی معادله دیفرانسیل در مقیاس توابع پایه مورد استفاده خواهد بود.

در اینجا این سوال مطرح می شود که تابع مناسب $u_0(t)$ چگونه محاسبه می شود. جهت پاسخ به این پرسش بایستی توجه داشت که جوابی که از حل معادله (۱۵) بدست می آید یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل (۸) می باشد. بنابراین تابع $u_0(t)$ جواب همگن معادله دیفرانسیل (۸) (و شامل ضرایب ثابت) می باشد که ضرایب آن به گونه ای معین می شود که جواب نهایی (که مجموع جواب همگن و جواب خصوصی است) در شرط اولیه یا مرزی مسئله صدق کند.

۷- مسئله مورد بررسی

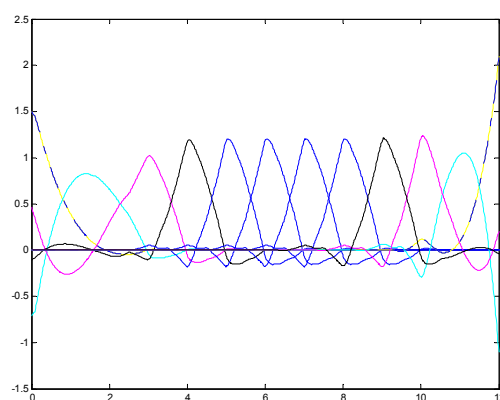
از میان هزاران معادله دیفرانسیل قابل حل توسط این روش، توجه خود را به معادله (۱۶) معطوف می کنیم تا هم جواب تحلیلی معادله جهت بررسی صحت کار^{۱۳} امکان پذیر باشد و هم امکان مقایسه میان جواب های بدست آمده در این مقاله با کارهای قبلی فراهم باشد.

$$u' + u = 1 \quad \{u(0) = -1\} \quad (0 \leq t \leq 12) \quad (16)$$

اگر چه این معادله، به ظاهر ساده است اما تمامی مراحل لازم جهت حل یک معادله دیفرانسیل خطی را در حالت کلی در بر دارد.

همزمان با حفظ تعامد تابع جدید با توابع همسایه خود بایستی کماکان برقرار باشد. با دور شدن از مرز این مشکل کم رنگ تر می شود و برای مثال چهارمین تابع گوشه ای بسیار شبیه به توابع میانی می شود.

شیوه استفاده از این توابع بدین گونه است که ابتدا هر تعداد تابع مقیاس (یا ویولت) که همگی آنها به طور کامل درون بازه قرار می گیرند به فواصل $1/2^n$ واحد از یکدیگر جای داده می شوند. در بازه هایی که تابع مقیاس (و ویولت) مربوطه مرز مسئله را قطع می کند (در هر طرف برای چهار تابع مقیاس و ویولت چنین اتفاقی رخ خواهد داد) به ترتیب توابع گوشه ای مربوطه جانشین شده و بدین شکل کل بازه پوشش داده می شود. به عنوان مثال شیوه جای دهی توابع مقیاس میانی و گوشه ای در مقیاس صفر و در بازه (0,12) در شکل ۲۰ نشان داده شده است.



شکل ۲۰: شیوه جای دهی توابع مقیاس در بازه (0,12)

۶- روش گالرکین

اگر معادله (۲) یک معادله دیفرانسیل خطی تعریف شده بر روی بازه $[a, b]$ با شرایط مرزی معلوم باشد که L یک عملگر دیفرانسیلی خطی است، معادله (۸) بیانگر شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی خواهد بود:

$$L[u(t)] = h(t) \quad (8)$$

$u(t)$ جواب معادله دیفرانسیل (۸) قابل نوشته شدن به فرم معادله (۹) می باشد. توابع g_i می توانند توابع پایه هر تبدیلی باشند که در این مقاله توابع مقیاس دابشیز ۴ می باشند. در مورد تابع $u_0(t)$ که جهت برقراری شرایط مرزی تعریف می شود بعداً توضیح داده می شود. [۴ و ۳]

$$u(t) \approx u_a(t) = u_0(t) + \sum_{j=1}^N a_j g_j(t) \quad (9)$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$L \left[\sum_{j=1}^N a_j g_j(t) \right] + E(a_1, a_2, \dots, a_N, t) = L[u(t)] = h(t) \quad (10)$$

¹³ Validation

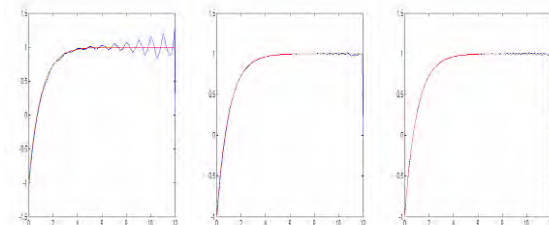
۷- نتیجه گیری

استفاده از تبدیل ویولت به عنوان توابع پایه در روش گالرکین، ابزار مناسبی جهت حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل خطی (چه با ضرایب ثابت و چه با ضرایب متغیر با زمان) می باشد اما به دلیل اینکه اکثر توابع پایه این تبدیل (از جمله توابع دابشیز) روابط صریح ندارند و نیاز به حل عددی معادلات وجود دارد پاسخ بدست آمده وابسته به روش حل و شیوه انجام محاسبات خواهد بود. استفاده از روش موجود در این مقاله در حل معادلات بر روی بازه از محاسبات اضافی در بازه هایی که جواب آنها مورد توجه نیست اجتناب می شود که این امر زمان حل را به به مراتب کاهش می دهد. اما با استفاده از نتایج مرجع [۱] ممکن بود چنین برداشت شود که جهت رسیدن به پاسخ دقیق می بایست رزولوشن پاسخ و در نتیجه حجم محاسبات را بالا برد اما در اینجا نشان داده شد که رسیدن به پاسخ دقیق در رزولوشن های کم و با حجم کمتری از محاسبات نیز امکان پذیر خواهد بود.

۸- مراجع

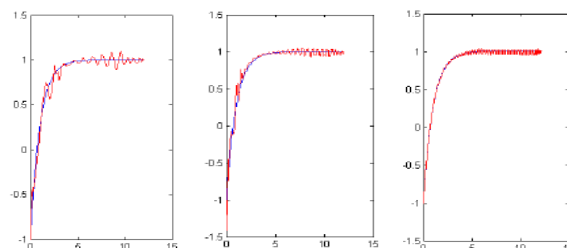
- [1] Ahmadi, Mahdi; Safavi, Ali. A.; "Exact Solution of Ordinary Differential Equations Using Wavelets on Interval" accepted at WAC2008
- [2] Daubechies, Ingrid; "Ten Lectures on Wavelet"; Society for Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania 1992.
- [3] Maria Cristina Pereyra; Martin J. Mohlenkamp; "Wavelets, their friends, and what they can do for you";
- [4] Beylkin, G., "On wavelet-based algorithm for solving differential equations", preprint, 1992
- [5] Safavi, A. A., J. Chen, J. A. Romagnoli, "Wavelet-Based Density Estimating and Application to Process Monitoring". AIChE Journal, May 1997, Vol. 43, No. 5.

با استفاده از نرم افزار MATLAB و با تعریف توابع میانی و گوشه ای در آن^{۱۴} و با انتخاب رزولوشن دلخواه و محاسبه ماتریس های معلوم در معادله (۱۵)، ماتریس متشکل از ضرایب مجهول a_j محاسبه شده و با قرار دادن آن در معادله (۹) تابع $u(t)$ محاسبه شده است. جواب های بدست آمده در این مقاله در شکل (۲۱) نشان داده شده اند. (جواب تحلیلی رنگ قرمز و جواب بدست آمده رنگ آبی)



شکل ۲۱: جواب های بدست آمده در این مقاله در رزولوشن های ۳ (سمت راست)، ۲ (وسط) و ۱ (سمت چپ)

این در حالی است که در مرجع [۱] جواب ها به شکل زیر بوده اند (جواب اصلی به رنگ آبی و جواب بدست آمده رنگ قرمز):



شکل ۲۲: جواب های بدست آمده در مرجع [۱] در رزولوشن های ۳ (سمت راست)، ۲ (وسط) و ۱ (سمت چپ)

همانگونه که از مقایسه شکل های (۲۱) و (۲۲) قابل برداشت است در یک رزولوشن برابر، دقت جواب های بدست آمده در این مقاله بخصوص در رزولوشن های ۲ به بالا (که در این شکل ها تا رزولوشن ۳ آمده است) به مراتب بهتر و دقیق تر از جواب های ارائه شده در مرجع [۱] می باشد.

خطای جواب های این مقاله در نقاط ابتدایی و میانی بازه در کلیه رزولوشن ها، از خطای جواب های مرجع [۱] به مراتب کمتر است. در شکل (۲۱) مربوط به جواب در رزولوشن ۱ در انتهای بازه خطایی مشاهده می شود که از خطای رزولوشن ۱ مربوط به این بازه در شکل (۲۲) بیشتر است که به دلیل تفاوت تکنیک تولید مشتقات و انتگرال از توابع گوشه ای در این مقاله و مرجع [۱] می باشد. اما به این دلیل که این تفاوت (که در رزولوشن کم (۰ و ۱) خطای بیشتری تولید می کند) در رزولوشن های بالاتر باعث دقت بیشتری می شود کمکان به نظر می رسد در مجموع دقت جواب های فوق به مراتب بهتر از جواب های مرجع [۱] می باشد.

^{۱۴} با توجه به اینکه 4 Daubechies تعریف شده در MATLAB از نوع compactly-supported (شکل ۸) است و توابع گوشه ای نیز تعریف نشده اند، بایستی در ابتدای امر این توابع را تعریف کرد.